Aula 6

Teorema 1 Sejam E um esp. de Banach com $\dim E = \infty$ e $A: D(A) \subset E \to E$ um operador fechado com resolvente compacta $\Rightarrow$

1) ou $\sigma(A) = \phi$ ou $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ contém no máximo número contável dos autovalores λ_j.

2) Se $|\sigma(A)| = \infty \Rightarrow |\lambda_j| \to \infty$

3) $\forall \lambda_j \in \sigma(A)$ $\dim N(\lambda_j - A) < \infty$.

Demonstração Seja $\mu \in \rho(A) \Rightarrow \sigma(R_\mu(A)) \supset \{0\}$. (T1 da aula 5)

Além disso $\sigma(R_\mu(A))$ contém no máximo sequência infinita dos autovalores μ_j e $|\mu_j| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ se $|\sigma(R_\mu(A))| = \infty$. Sabemos que μ_j satisfazem:

- $\dim N(\mu_j - R_\mu(A)) < \infty$ $\forall j$

- $(\mu - \sigma(A))^{-1} = \sigma(R_\mu(A)) \setminus \{0\}$ ← Veja aula 4, Prop 1

  $(\mu - \sigma_i(A))^{-1} = \sigma_i(R_\mu(A)) \setminus \{0\}$, $i \in \{p, ap, r\}$

Logo 1) e 2) valem com $\lambda_j = \mu - \mu_j^{-1}$ (Já que $(\mu - \lambda_j)^{-1} = \mu_j$).

Para provar 3) observe que

$$\lambda_j - A = \mu_j^{-1}(\mu_j - \underbrace{R_\mu(A)}_{=(\mu-A)^{-1}})(\mu - A) \Rightarrow$$

$= (\mu - \mu_j^{-1}) - A = \lambda_j - A$

$$\dim(N(\lambda_j - A)) = \dim(N(\mu_j - R_\mu(A))) < \infty.$$

Ex 1 Sejam $E = C[0,1]$, $D(A) = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = x(1)\}$

$(Ax)(t) = x'(t)$. Mostre que A é fechado, tem resolvente compacto, e $\sigma(A) = \sigma_p(A) = 2\pi i \mathbb{Z}$.

Demonstração. • É fácil mostrar que A é fechado

• Mostremos que $1 \in \rho(A)$

$I - A$ é injetor: Suponha que $\exists\, x \in D(A)$ tal que

$x'(t) = x(t) \Rightarrow x(t) = Ce^t \Rightarrow x(0) = C = x(1) = Ce \Rightarrow$

$C = 0$.

$I - A$ é sobrejetor: Seja $f \in C[0,1]$, mostremos que

$$\tilde{x}(t) = \frac{e^{t+1}}{e-1}\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds - \int_0^t e^{t-s} f(s)\,ds \quad \text{satisfaz}$$

$(I-A)\tilde{x} = f$. Temos $\tilde{x}(0) = \frac{e}{e-1}\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds$ e

$$\tilde{x}(1) = \frac{e^2}{e-1}\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds - e\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds = \frac{e^2 - e^2 + e}{e-1}\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds$$

$= \tilde{x}(0) \Rightarrow \tilde{x}(t) \in D(A)$.

Do outro lado, $\tilde{x}'(t) = \frac{e^{t+1}}{e-1}\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds - e^t\int_0^t e^{-s} f(s)\,ds -$

$$- f(t) \Rightarrow (I-A)\tilde{x} = \frac{e^{t+1}}{e-1}\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds - \int_0^t e^{t-s} f(s)\,ds -$$

$$- \frac{e^{t+1}}{e-1}\int_0^1 e^{-s} f(s)\,ds + e^t\int_0^t e^{-s} f(s)\,ds + f(t) = f(t)$$

Logo $R_1(A)$ é limitado por T. do gráfico fechado

$\Rightarrow 1 \in \rho(A)$.

Observe que $R_1(A) f = T_K f = \int_0^1 K(t,s) f(s)\,ds$,

$f(t) \in C[0,1]$, onde $K(t,s) = K_1(t,s) + K_2(t,s)$,

$$K_1(t,s) = \frac{e^{t-s+1}}{e-1}, \quad 0 \le t,s \le 1,$$

$$K_2(t,s) = \begin{cases} -e^{t-s}, & 0 \le s < t \le 1 \\ 0, & 0 \le t \le s \le 1 \end{cases} = -e^{t-s}\chi_{[0,t]}(s)$$

Vamos usar <u>Prop 1</u> da aula 5.

Observe que $K(t,\cdot)$ é integrável $\forall t \in [0,1]$ e $[0,1] \ni t \longmapsto K(t,\cdot) \in L^1[0,1]$ é contínuo. De fato

$K_1(t,s) \in C([0,1]^2) \Rightarrow [0,1] \ni t \longmapsto K_1(t,s) \in L^1[0,1]$.

Mostremos para $K_2(t,s)$: suponha que $t_0, t_1 \in [0,1]$, $t_1 > t_0 \Rightarrow$

$$\|K_2(t_1,s) - K_2(t_0,s)\|_{L^1} = \int_0^1 |\chi_{[0,t_1]} e^{t_1-s} - \chi_{[0,t_0]} e^{t_0-s}| ds$$

$$\le \int_0^{t_0} |e^{t_1-s} - e^{t_0-s}| ds + \int_{t_0}^{t_1} |e^{t_1-s}| ds < \varepsilon \text{ se } |t_0 - t_1| < \delta.$$

$\Rightarrow [0,1] \ni t \longmapsto K_2(t,\cdot) \in L^1[0,1]$ é contínuo.

Logo, pela Prop 1 da aula 5, temos que $R_1(A)$ é compacto $\Rightarrow \sigma(A) = \sigma_p(A)$. Temos $\lambda \in \sigma_p(A)$ <u>sse</u> existir $x \in D(A)$ tal que $x' = \lambda x \Rightarrow x = Ce^{\lambda t}$ e $x(0) = C = x(1) = Ce^{\lambda} \Rightarrow e^{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 2\pi i \mathbb{Z}$.

<u>Ex 2</u> $E = C[0,1]$, $D(A) = \{x \in C^2[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}$, $Ax = -x''$. Na aula passada mostramos que

$$(R_0(A)f)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds, \text{ onde } G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \le t \le s \le 1 \\ s(1-t), & 0 \le s \le t \le 1 \end{cases}$$

e $R_0(A)$ é compacto $\Rightarrow A$ tem resolvente compacta.

Temos: $\sigma(R_0(A)) = \{0\} \cup \sigma_p(R_0(A)) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{\pi^2 k^2}, k = 1, 2, \dots\right\}$

Lembra que $\sigma(R_0(A))\setminus\{0\} = \sigma(A)^{-1}$ e

$\sigma_j(R_0(A))\setminus\{0\} = \sigma_j(A)^{-1}$, $j \in \{p, ap, r\}$ $\Rightarrow$

$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\pi^2 k^2, k = 1, 2, \dots\}$

Operadores de Fredholm

Lembrete Sejam E um esp. de Banach e $M \subset E$ um subesp. $\Rightarrow$ O espaço quociente

$E/M = \{[u] = u + M, u \in E\}$.

- $[u_1] = [u_2] \Leftrightarrow u_1 - u_2 \in M$ $([u] = [0] \Leftrightarrow u \in M)$
- $\|[u]\| = \inf\limits_{v \in [u]} \|v\| = \inf\limits_{z \in M} \|u - z\| = \operatorname{dist}(u, M)$
- Se $M = \overline{M} \Rightarrow E/M$ é esp. de Banach.

Def 1 Sejam E_1, E_2 esp. de Banach e $A \in B(E_1, E_2)$

$\Rightarrow A$ é dito operador de Fredholm se

1) $R(A) = \overline{R(A)}$ em E_2
2) $\dim N(A) < \infty$
3) $\operatorname{codim} R(A) = \dim(E_2 / R(A)) < \infty$.

("Fredholmnidade" significa invertibilidade em todo E_2 menos um espaço de dimensão finita)

Observação 1) Se $0 \in \rho(A) \Rightarrow A$ é de Fredholm

2) Se $\dim E = \infty \Rightarrow$ operadores de Fredholm não formam um subespaço linear em $B(E)$. De fato, I é de Fredholm, mas $I - I = 0$ não é.

Def 2 Seja $A \in B(E_1, E_2)$ de Fredholm $\Rightarrow$

$\operatorname{ind}(A) = \dim N(A) - \operatorname{codim} R(A)$ é dito o índice de A.

Observação Seja $p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists A$ de Fredholm tal que $\operatorname{ind}(A) = p$.

Demonstração. Seja $D(A_1) = \ell^p$, $1 \le p \le \infty$,

$A_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots) \Rightarrow$

$R(A_1) = \ell^p$ e $N(A_1) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \Rightarrow \operatorname{ind}(A_1) = n$

• Seja $D(A_2) = \ell^p$, $1 \le p \le \infty$, $A_2(x_1, x_2, \dots) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, x_1, x_2, \dots)$

$\Rightarrow N(A_2) = \{0\}$ e $\ell^p / R(A_2) \cong \operatorname{span}\{\underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{vetores da base canônica}}\}$

$\Rightarrow \operatorname{ind}(A_2) = -n$

Proposição 1 Seja $A \in B(E_1, E_2)$ um op-r de Fredholm com $\operatorname{ind}(A) = 0 \Rightarrow \exists$ um operador inversível $J \in B(E_2, E_1)$ e um operador do posto finito $K \in B_0(E_1)$ tais que

$JA = I_{E_1} - K$.

Demonstração Observe que $\exists$ subesp.-s fechados $X_1 \subset E_1$ e $Y_2 \subset E_2$ tais que $E_1 = N(A) \oplus X_1$ e

$E_2 = X_2 \oplus R(A)$. somas diretas

De fato, considere $P_{N(A)}$ e $P_{R(A)}$ projeções limitadas aos $N(A)$ e $R(A)$ resp-te. $\Rightarrow$

$N(A) = R(P_{N(A)})$ e $R(A) = R(P_{R(A)})$.

Definimos $X_1 = N(P_{N(A)})$ e $X_2 = N(P_{R(A)})$;

X_1 e X_2 são fechados como núcleos dos operadores contínuos. (Vejam Lema 2.16 na apostila indicada na página)

Definimos $A_1 : X_1 \times X_2 \to E_2$, $A_1(x_1, x_2) = Ax_1 + x_2$ A_1 faz parte da construção de J

$\Rightarrow A_1$ é linear e contínuo.

$(\|A_1(x_1,x_2)\|_2 = \|Ax_1\|_2 + \|x_2\|_2 \leq (\|A\|+1)\|(x_1,x_2)\|)$

- Mostremos que A_1 é injetor. Suponha que $A_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 0 \Rightarrow \underset{E_2 \ominus R(A)}{\underset{\cap}{\tilde{x}_2}} = -A\tilde{x}_1 \in R(A) \Rightarrow \tilde{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$\tilde{x}_1 \in N(A) \cap X_1 \Rightarrow \tilde{x}_1 = 0 \Rightarrow (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (0, 0) \Rightarrow$

A é injetor.

- Mostremos que A_1 é sobrejetor. Seja $\tilde{y} \in E_2 \Rightarrow$ $\tilde{y} = \tilde{y}_2 + \tilde{y}_0$, $\tilde{y}_2 \in X_2$, $\tilde{y}_0 \in R(A) \Rightarrow \exists \tilde{x}_0 \in D(A)$ tal que $\tilde{y}_0 = A\tilde{x}_0$. Logo, $\tilde{y} = \tilde{y}_2 + A\tilde{x}_0 = A_1(\tilde{x}_0, \tilde{y}_2) \Rightarrow A_1$ é sobrejetor.

Finalmente, $A_1^{-1} : E_2 \to X_1 \times X_2$ é limitado por T. de Banach. Já que $\dim N(A) = \underset{\text{ind}(A)=0}{\operatorname{codim}} R(A) = \dim X_2$, existe um isomorfismo $S : X_2 \to N(A)$.

Definimos $S_1 : X_1 \times X_2 \to E_1$, $S_1(x_1, x_2) = x_1 + \underbrace{Sx_2}^{\in N(A)}$

Similarmente existe $S_1^{-1} \in B(E_1, X_1 \times X_2)$ e portanto o operador $J = S_1 \cdot A_1^{-1} \in B(E_2, E_1)$ é inversível, isto é $J^{-1} \in B(E_1, E_2)$.

- Definimos $K = I_{E_1} - JA \in B(E_1)$. Mostremos que K tem posto finito. $X_1 \subseteq N(K)$. De fato, seja $x_1 \in X_1 \Rightarrow Kx_1 = x_1 - JAx_1 = x_1 - S_1 A_1^{-1} A x_1 =$

...

$= x_1 - f_1(x_1, 0) = x_1 - x_1 = 0 \Rightarrow X_1 \subseteq N(K)$.

Já que $E_1 = X_1 \oplus N(A)$, deduzimos $KE_1 \subseteq KN(A)$

$\Rightarrow \dim R(K) \leq \dim N(A) < \infty$.

Teorema 2 Sejam $A \in B(E_1, E_2)$ um op-r de Fredholm e $T \in B_0(E_1, E_2) \Rightarrow A+T$ é de Fredholm com $\operatorname{ind}(A+T) = \operatorname{ind}(A)$.

Demonstração • Suponha que $\operatorname{ind}(A) = 0 \Rightarrow$ pela Prop. 1 $\exists\, J \in B(E_2, E_1)$ inversível e $K \in B_0(E_1)$ tais que $JA = I_{E_1} - K$. Temos $J(A+T) = I_{E_1} - K + JT = I_{E_1} - \underbrace{(K - JT)}_{\text{comp.}} = I_{E_1} - K_1$. Por T1 da aula 5 (Riesz-Schauder), temos $\dim N(I - K_1) = \operatorname{codim} R(I - K_1)$

$\Rightarrow \operatorname{ind}(J(A+T)) = 0 \Rightarrow \operatorname{ind}(A+T) = 0$

(como J é isomorfismo).

• Suponha que $\underbrace{\operatorname{ind}(A)}_{n} > 0$. Seja $\tilde{E}_2 = E_2 \times \mathbb{C}^n$ e

$\tilde{A} : E_1 \to \tilde{E}_2$, $\tilde{A}x = (Ax, 0)$, $\tilde{T} : E_1 \to \tilde{E}_2$, $\tilde{T}x = (Tx, 0)$

Temos $R(\tilde{A}) = \overline{R(\tilde{A})}$ já que $R(A) = \overline{R(A)}$ e. Em particular,

$\tilde{E}_2 / R(\tilde{A}) \cong (E_2 / R(A)) \times \{0\}$.

$\operatorname{codim} R(\tilde{A}) = \operatorname{codim} R(A) + n \Rightarrow$

$\operatorname{ind}(\tilde{A}) = \dim N(\tilde{A}) - \operatorname{codim} R(\tilde{A}) = \dim N(A) - \operatorname{codim} R(A) - n = 0$

Como $\tilde{T}$ é compacto, por caso anterior concluímos que $\tilde{A} + \tilde{T}$ é de Fredholm com $\operatorname{ind}(\tilde{A} + \tilde{T}) = 0$

Observando que $(\tilde{A}+\tilde{T})x = (Ax+Tx, 0)$, obtemos $N(\tilde{A}+\tilde{T}) = N(A+T)$ e $\tilde{E}_2 / R(\tilde{A}+\tilde{T}) \cong (E_2/R(A+T)) \times \{0\}$

$\Rightarrow \operatorname{codim} R(\tilde{A}+\tilde{T}) = \operatorname{codim} R(A+T) + n \Rightarrow$

$\operatorname{ind}(A+T) = \dim N(A+T) - \operatorname{codim} R(A+T) =$

$= \dim N(\tilde{A}+\tilde{T}) - \operatorname{codim} R(\tilde{A}+\tilde{T}) + n = n.$

• Suponha que $\underbrace{\operatorname{ind}(A)}_{-n} < 0$. Definimos $\hat{E}_1 = E_1 \times \mathbb{C}^n$

e $\hat{A} : \hat{E}_1 \to E_2$, $\hat{A}(x,y) = Ax$, $\hat{T} : \hat{E}_1 \to E_2$, $\hat{T}(x,y) = Tx$

Observando que $\dim N(\hat{A}+\hat{T}) = \dim N(A+T) + n$ e

$R(\hat{A}+\hat{T}) = R(A+T)$ e $\operatorname{ind}(\hat{A}+\hat{T}) = 0$ isso segue do 1º caso já que $\operatorname{ind}(\hat{A}) = 0$,

obtemos $\operatorname{ind}(A+T) = \dim N(A+T) - \operatorname{codim} R(A+T) =$

$= \dim N(\hat{A}+\hat{T}) - n - \operatorname{codim} R(\hat{A}+\hat{T}) = -n$